Correction du DS 3

Exercice de physique : détermination d'une masse en impesanteur

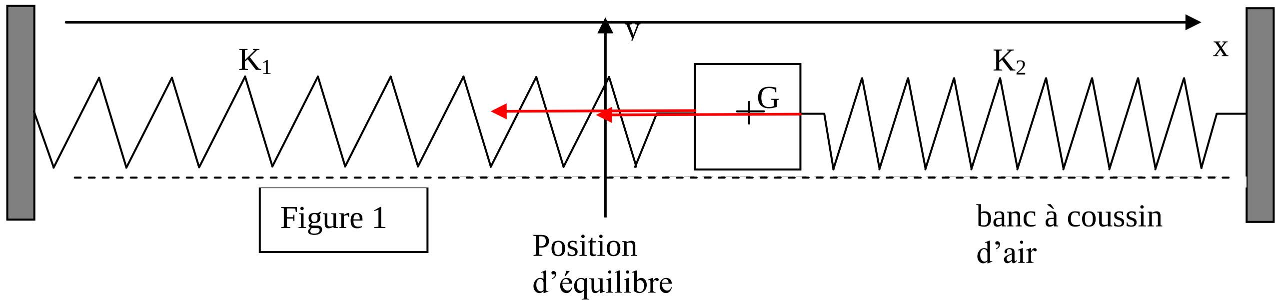


Figure 1

1. Montrer que le montage est équivalent à une situation théorique constituée d'un solide de même masse et d'un seul ressort de constante de raideur $\mathbf{K_{éq} = K_1 + K_2}$ = 40,0 N.m^{-1}. (figures 2-3).

La force exercée par le ressort 1 est orientée vers la gauche car le ressort est étiré : $\vec{F_1} = -K_1 x\vec{i}$

La force exercée par le ressort 2 est également orientée vers la gauche car il est comprimé. Elle a même valeur que l'autre puisque le ressort 2 est raccourci d'une longueur égale à l'étirement de l'autre ressort : $\vec{F_2} = -K_2 x\vec{i}$.

Donc : $\vec{F_{éq}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -(K_1 + K_2)x\vec{i}$

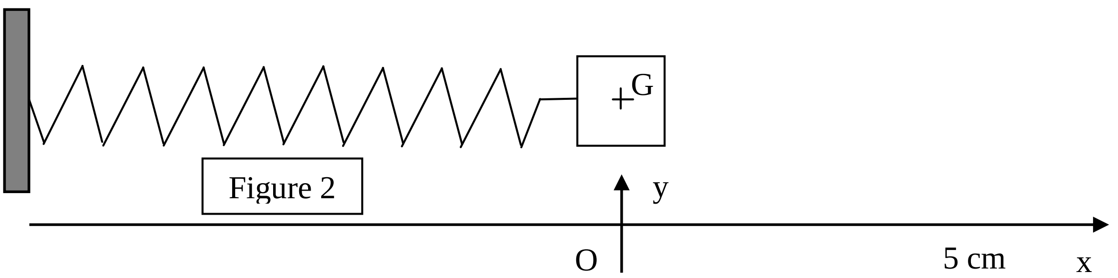


Figure 2

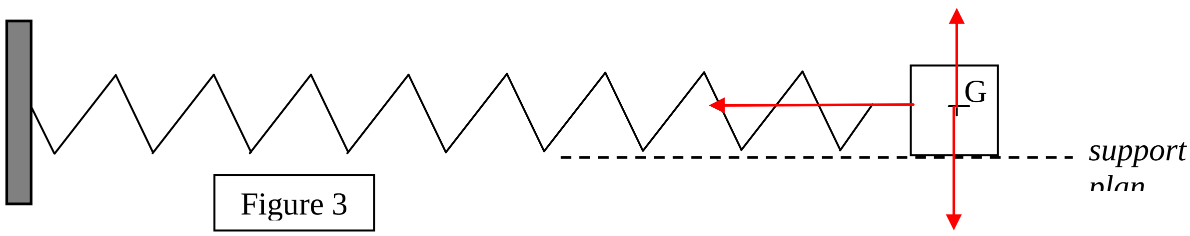


Figure 3

On étudie la situation à partir du modèle représenté sur les figures 2 et 3.
Le repère choisi est tel que la position d'équilibre de la boîte corresponde à x = 0.
Les forces de frottement ainsi que l'amortissement du mouvement sont considérés comme négligeables.
La boîte, contenant un échantillon de masse m qu'on veut déterminer, est initialement écartée d'une distance x_0 = 5,0 cm de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

2. Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées sur la boîte immédiatement après le lâcher, et représenter les vecteurs-force sur **la figure 3** sans souci d'échelle.

   Les forces appliquées sont :
   - Le poids vertical descendant
   - La réaction du support verticale ascendante
   - La force de rappel élastique du ressort.

3. Etablir l'équation différentielle du mouvement du point G.

D'après la deuxième loi de Newton appliquée au solide de masse m+m_0 :

$(m+m_0)\,.\vec{a}=\vec{R}+\vec{P}+\vec{F}_{éq}$ or il n'y a pas de mouvement vertical d'où, d'après le principe d'inertie,

$\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}$ soit : $(m+m_0)\,.\vec{a}=-K_{éq}.x\vec{i}$

En projetant sur l'axe x : $(m+m_0)\,.a_x=-K_{éq}.x$ or : $a_x=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ donc : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{K_{éq}}{m+m_0}x=0$.

4. Montrer que $x(t)=A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}+\varphi\right)$ est solution de l'équation différentielle du mouvement à condition d'exprimer $\mathbf{T_0}$ en fonction de $\mathbf{K_{éq}}$, **m** et $\mathbf{m_0}$.

Remplaçons dans l'équation différentielle : $\dfrac{d^2}{dt^2}\left[A.\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T_0}+\varphi\right)\right]+\dfrac{K_{éq}}{m+m_0}\left[A.\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T_0}+\varphi\right)\right]=0$.

D'où : $-A.\dfrac{4\pi^2}{T_0^{\ 2}}.\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T_0}+\varphi\right)+\dfrac{K_{éq}}{m+m_0}A.\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T_0}+\varphi\right)=0$

Soit : $\left(\dfrac{K_{éq}}{m+m_0}-\dfrac{4\pi^2}{T_0^{\ 2}}\right).A\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T_0}+\varphi\right)=0$ or cette relation doit être vraie pour tout t donc :

$\left(\dfrac{K_{éq}}{m+m_0}-\dfrac{4\pi^2}{T_0^{\ 2}}\right)=0$ soit : $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{m+m_0}{K_{éq}}}$

5. En utilisant les conditions initiales, donner la valeur de **A** et de φ.

A t=0, on sait que x(0) =0 et v(0)=0. Or $x(0)=A\cos(\varphi)$ et $v(0)=\dfrac{dx}{dt}(0)=-A\dfrac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)$

D'où $-A\dfrac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)=0$ soit : $\sin(\varphi)=0$ et donc $\underline{\varphi=0}$ ou $\underline{\varphi=\pi}$.

De plus , $A\cos(\varphi)=x_0$ soit, en utilisant le résultat précédent : $A=x_0$ ou $-A=x_0$.

Or x_0 > 0. On a donc : $\underline{A=x_0}$ et $\underline{\varphi=0}$.

6. Déterminer précisément la valeur de la période propre T_0 en détaillant la méthode utilisée.

On mesure 4,0 s pour 12,5 périodes donc T_0 = 0,32 s.

7. En déduire la valeur de la masse *m* de l'objet introduit dans la boîte.

On a montré que $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{m+m_0}{K_{éq}}}$ soit $m=\dfrac{T_0^{\ 2}K_{éq}}{4\pi^2}-m_0$ A.N : $m=\dfrac{40,0\times0,32^2}{4\pi^2}-20,0.10^{-3}=8,4.10^{-2}$ g

Ce dispositif est utilisé car une balance ne fonctionne pas en impesanteur. Tous les objets de l'ISS sont soumis à la même accélération a que la station.

8. Etude d'une balance en impesanteur.

8.1. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ d'un objet dans l'ISS soumis à la seule force de gravitation en fonction de la masse de la Terre M_T, du rayon de la Terre R_T et de l'altitude *z* de la station.

D'après la 2[e] loi de Newton appliquée à un objet de la station dans le référentiel géocentrique :

$$m.\vec{a} = G\frac{m.M}{{R_T+z}^{2}}\overrightarrow{u_N} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = G\frac{M}{{R_T+z}^{2}}\overrightarrow{u_N}$$

8.2. Montrer que, si l'on pose l'objet sur une balance dans l'ISS, l'action du plateau de la balance sur l'objet est nulle.

D'après la 2[e] loi de Newton appliquée à un objet de la station posé sur un balance dans le référentiel géocentrique :

$$m.\vec{a} = G\frac{m.M}{{R_T+z}^{2}}\overrightarrow{u_N} + \vec{R} \quad \text{or} \quad \vec{a} = G\frac{M}{{R_T+z}^{2}}\overrightarrow{u_N} \quad \text{donc : } \vec{R} = \vec{0}.$$

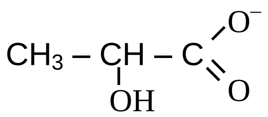
8.3. En déduire pourquoi une balance ne fonctionne pas en impesanteur.

D'après la 3[e] loi de Newton, si la balance n'exerce aucune force sur l'objet, alors l'objet n'exerce aucune force sur la balance : la balance indique alors une masse nulle…
La balance « tombe » en même temps que l'objet, comme tout ce qui est dans la station, elle est donc aussi en impesanteur.

Exercice 2 : Fraicheur d'un lait

1. L'acide lactique

1.1. Donner la formule semi-développée de l'ion lactate, base conjuguée de l'acide lactique.



anion lactate, base conjuguée de l'acide lactique.

1.2. Donner l'expression de la constante d'acidité K_A du couple acide lactique / ion lactate.

$HA_{(aq)} + H_2O_{(l)} = A^-_{(aq)} + H_3O^+$ $\qquad K_A = \dfrac{[A^-_{(aq)}]_f \cdot [H_3O^+]_f}{[HA_{(aq)}]_f}$

La mesure au laboratoire du pH *d'une solution d'acide lactique de concentration C égale à* $1{,}0 \times 10^{-2}$ mol.L^{-1} *donne pH* = 2,9*.*

1.3. Calculer la concentration en ions oxonium dans la solution.

$[H_3O^+] = 10^{-pH}$
$[H_3O^+]_f = 10^{-2{,}9} = 1{,}3 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1}

1.4. Exprimer la constante d'acidité K_A du couple de l'acide lactique en fonction du pH et de la concentration de la solution C.

$K_A = \dfrac{[A^-_{(aq)}]_f \cdot [H_3O^+]_f}{[HA_{(aq)}]_f}$

D'après la conservation de la matière $[HA_{(aq)}]_{initiale} = c = [A^-_{(aq)}]_f + [HA_{(aq)}]_f$
soit $[HA_{(aq)}]_f = c - [A^-_{(aq)}]_f$
De plus d'après l'équation chimique $[H_3O^+]_f = [A^-_{(aq)}]_f$

alors $K_A = \dfrac{[H_3O^+]_f^2}{c-[H_3O^+]_f} = \dfrac{10^{-2.pH}}{c-10^{-pH}}$

1.5. Calculer sa valeur ainsi celle du pK_A.

$K_A = \dfrac{10^{-2\times 2,9}}{1,0\times 10^{-2}-10^{-2,9}}$

$K_A = 1,8\times 10^{-4}$

$pK_A = -\log Ka$ donc **$pK_A = 3,7$**

2. Dosage de l'acide lactique dans un lait

On introduit dans un erlenmeyer 20,0 mL *d'un échantillon de lait et quelques gouttes de phénolphtaléine. On ajoute progressivement une solution d'hydroxyde de sodium de concentration* $5,0\times 10^{-2}$ mol.L^{-1}. *Le changement de couleur du milieu réactionnel est observé pour un volume de solution d'hydroxyde de sodium ajouté égal à* 9,2 mL.

2.1. Écrire l'équation de la réaction entre l'acide lactique et l'ion hydroxyde.

$HA_{(aq)} + HO^-_{(l)} = H_2O + A^-_{(aq)}$

2.2. Définir l'équivalence d'un dosage

A l'équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques et ont totalement réagi. Il y a aussi changement de réactif limitant.

2.3. Déterminer la concentration molaire en acide lactique du lait étudié.

A l'équivalence, $c_A.V_A = c_B.V_{BE}$

$$c_A = \frac{c_B.V_{BE}}{V_A}$$

$c_A = \dfrac{5,0\times 10^{-2}\times 9,2}{20,0}$ = **$2,3\times 10^{-2}$ mol.L^{-1}**

La concentration en acide lactique d'un lait frais ne doit pas dépasser 1,8 g.L^{-1}.

2.4. Conclure quant à la fraîcheur du lait étudié.

Soit la t concentration massique, et c_A la concentration molaire, on a : $t = c_A . M_{\text{acide lactique}}$

$t = 2,3\times 10^{-2} \times 90,0$

t = 2,1 g.L^{-1}

Cette concentration est supérieure à celle d'un lait frais. Le lait étudié **n'est pas frais**.

3. Etude de la réaction de dosage

Pour un volume versé de 5,0 mL de solution d'hydroxyde de sodium, le pH a une valeur de 4,0.

3.1. Calculer la quantité $n_V(HO^-)$ d'ions hydroxyde versés depuis le début du titrage.

$n_V(HO^-) = C_B.V_B$

$n_V(HO^-) = 5,0\times 10^{-2}\times 5,0\times 10^{-3}$ = **$2,5\times 10^{-4}$ mol**

3.2. À partir de la valeur du pH, calculer la quantité $n_R(HO^-)$ d'ions hydroxyde restants dans la solution.

D'après le produit ionique de l'eau : $[HO^-_{(aq)}]_{éq} = \dfrac{K_e}{[H_3O^+_{(aq)}]_{éq}} = \dfrac{K_e}{10^{-pH}}$

$n_R(HO^-) = [HO^-_{(aq)}]_{éq}.V_T = \dfrac{K_e}{10^{-pH}}.V_T = \dfrac{K_e}{10^{-pH}}.(V_B + V_A)$

$n_R(HO^-) = \dfrac{1{,}0 \times 10^{-14}}{10^{-4.0}} \times (5{,}0 + 20{,}0) \times 10^{-3}$ = $\mathbf{2{,}5 \times 10^{-12}}$ **mol**

3.3. Comparer $n_V(HO^-)$ et $n_R(HO^-)$. Comment peut-on alors qualifier la transformation qui correspond à ce titrage acido-basique ?

$n_R(HO^-) \ll n_V(HO^-)$, les ions hydroxyde versés sont entièrement consommés, la transformation qui correspond à ce titrage acido-basique peut être considérée comme **totale**.

3.4. Exprimer la constante d'équilibre K de la réaction en fonction du K_A et de K_E.

$$K = \frac{\left[A^-_{(aq)}\right]_f}{\left[HA_{(aq)}\right]_f.\left[HO^-\right]_f} = \frac{\left[A^-_{(aq)}\right]_f.\left[H_3O^+\right]_f}{\left[HA_{(aq)}\right]_f.\left[HO^-\right]_f.\left[H_3O^+\right]_f} = \frac{K_A}{K_E}$$

3.5. Calculer K. Cela confirme-t-il le résultat de la question 3.3 ?

$K=1{,}8.10^{10}$

Donc $K>10^4$ la réaction est bien totale.